Vorlesung

# Semantik von Programmiersprachen SS98

Priv.-Doz. Dr. Reinhold Heckmann und Dipl.-Inform. Stephan Thesing

## Übungsblatt IV

Ausgabe: 19.5.1998 Abgabe: 26.5.1998
Version: 1.6 Status: Final

*So wie, wenn der Arzt dem Knaben abscheulichen Wermut einzuflößen versucht, er vorher den Becher am Rande überstreicht mit Honig, ..., so hab' auch ich jetzt, da diese Lehre ja meistens ein wenig herb erscheint dem, der mit ihr nicht viel sich beschäftigt ... dir gewünscht in lieblich beredtem Lied ... ein Bild unsrer Lehre zu geben.*

Lukrez: De rerum natura

**Aufgabe IV.1** ((cpos) 3 Punkte) Seien $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ und $(C, \leq_C)$ cpos, $(A \times B, \leq_\times)$ die Produktcpo. Sei $f : A \times B \to C$ eine Funktion und seien $f_a : B \to C$ und $f^b : A \to C$ definiert als

$$\begin{array}{rcl} \forall a \in A, b \in B : f_a(b) & := & f(a, b) \\ \forall b \in B, a \in A : f^b(a) & := & f(a, b) \end{array}$$

Zeigen Sie: Die Funktion $f : A \times B \to C$ ist stetig, gdw. $\forall a : f_a$ stetig ist und $\forall b : f^b$ stetig ist, formaler:

$$f : A \times B \xrightarrow{c} C \iff \forall a \in A : f_a : B \xrightarrow{c} C \wedge \forall b \in B : f^b : A \xrightarrow{c} C$$

(Hinweis: Man benutze folgende Tatsache: Sei $(d_{ij})_{i\in\omega, j\in\omega}$ eine doppelt indizierte Folge ($d_{ij} \in C$) mit $\forall i : d_{i0} \leq d_{i1} \leq \cdots$ und $\forall j : d_{0j} \leq d_{1j} \leq \cdots$. Dann gilt $\bigsqcup_{i\in\omega} \bigsqcup_{j\in\omega} d_{ij} = \bigsqcup_{j\in\omega} \bigsqcup_{i\in\omega} d_{ij} = \bigsqcup_{k\in\omega} d_{kk}$.)

**Aufgabe IV.2** ((cpos) 2 Punkte) Zeigen Sie, daß die Funktion $cond : T_\perp \times M \times M \to M$ stetig ist. Dabei ist $T_\perp \times M \times M$ eine Produktcpo, $M$ eine cpo$_\perp$ und *cond* ist gegeben als

$$cond(b, x, y) = \begin{cases} x & \text{, falls } b = true \\ y & \text{, falls } b = false \\ \perp & \text{, falls } b = \perp \end{cases}$$

**Aufgabe IV.3** ((cpos) 3 Punkte) Sei $M$ eine Menge (diskrete cpo), $M_\perp$ die zugehörige flache cpo und $M \to M_\perp$ die Funktionscpo mit der punktweisen Ordnung. Sei weiterhin $f_0 \leq f_1 \leq \cdots$ eine $\omega$-Kette in $M \to M_\perp$ und sei $g : M \to M_\perp$ beliebig. Zeigen Sie:

1. ${f_0}_\perp \circ g \leq {f_1}_\perp \circ g \leq \cdots$ ist eine $\omega$-Kette in $M \to M_\perp$.
2. $(\bigsqcup_{i \in \omega} f_i)_\perp \circ g = \bigsqcup_{i \in \omega} ({f_i}_\perp \circ g)$.

**Aufgabe IV.4** ((`while`-Semantik) 3 Punkte) Die Semantik des `while` Konstruktes wurde in der Vorlesung gegeben als

$$[\texttt{while } B \texttt{ do } C] = \mathit{lfp}(W_B^C)$$

Hierbei ist $W_B^C = \lambda f.\lambda\sigma.\mathit{cond}([B]\sigma, (f_\perp \circ [C])\sigma, \sigma)$.

Holen Sie den nötigen Beweis der Stetigkeit von $W_B^C$ nach, zeigen Sie also für jede Kette $f_0 \leq f_1 \leq \cdots$ in $\Sigma \to \Sigma_\perp$:

$$\bigsqcup_{i \in \omega} W_B^C(f_i) = W_B^C(\bigsqcup_{i \in \omega} f_i)$$

(Hinweis: Aufgabe IV.3 und die Sätze der Vorlesung mögen dabei die Arbeit verkürzen.)