Vorlesung
Semantik von Programmiersprachen SS98

Priv.-Doz. Dr. Reinhold Heckmann und Dipl.-Inform. Stephan Thesing

Übungsblatt III

Ausgabe: 12.5.1998 Abgabe: 19.5.1998
Version: 1.3 Status: Final

The attempt and not the deed confounds us.
Macbeth, Act 2, Scene 2

Aufgabe III.1 (POs (2 Punkte)) Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $X \subseteq M$ eine Teilmenge von M. Ein Element $m \in M$ heißt *obere Schranke* (upper bound) von X, falls $\forall y \in X : y \leq m$. Eine obere Schranke m von X heißt *kleinste oberste Schranke* (Supremum, least upper bound, lub), falls für alle anderen oberen Schranken m' von X gilt: $m \leq m'$, förmlicher:

$$\forall y \in X : y \leq m \text{ und}$$
$$\forall m' \in M : (\forall y \in X : y \leq m') \Rightarrow m \leq m'$$

Zeigen Sie: Falls ein Supremum einer Teilmenge $X \subseteq M$ existiert, so ist es eindeutig.

Aufgabe III.2 (POs (4 Punkte)) Sei $\mathbf{N}_\perp$ die Menge $\mathbf{N} \cup \{\perp\}$, mit $\perp \notin \mathbf{N}$. Auf $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ betrachten wir die partielle Ordnung

$$f \leq g \iff \forall n \in \mathbf{N} : f(n) \neq \perp \Rightarrow f(n) = g(n)$$

Sei $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ eine Kette in $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$. Dann können wir eine Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ wie folgt definieren:

$$f(n) = \begin{cases} m & \exists i \geq 0 : f_i(n) = m,\ m \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f is wohldefiniert.
2. f ist eine obere Schranke der Kette $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$.

3. f ist die kleinste oberste Schranke der Kette $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$.

Aufgabe III.3 (POs (4 Punkte)) Auf $\mathbf{N}_\perp$ definieren wir die partielle Ordnung

$$n \leq m \iff n = m \vee n = \perp.$$

Sei $G : (\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp) \to \mathbf{N}_\perp$ wie folgt definiert:

$$G(f) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \forall n \in \mathbf{N} : f(n) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle $i \geq 0$ sei $h_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$ durch

$$h_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq i \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

1. G ist monoton.
2. $h_0 \leq h_1 \leq \ldots$ ist eine Kette in $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$.
3. Sei h das Supremum der Kette $h_0 \leq h_1 \leq \ldots$. Bestimmen sie $G(h)$.
4. Bestimmen Sie $G(h_i)$ für alle i und das Supremum dieser Werte.