Einleitung

Motivation

Eine Potenz(bereich)-Konstruktion bildet jeden semantischen Bereich **X** aus einer bestimmten Klasse von Bereichen in einen sogenannten Potenzbereich über **X** ab, dessen Punkte Mengen von Punkten des Grundbereichs repräsentieren. Potenzbereich-Konstruktionen wurden ursprünglich entwickelt, um die Semantik nichtdeterministischer Programmiersprachen [Plo76, Smy78, HP79, Mai85] zu modellieren. Andere Motivationen sind die semantische Repräsentation eines Datentyps von Mengen [Hec90c] oder relationaler Datenbanken [BDW88] [Gun89b].

Plotkin [Plo76] schlug die erste Potenzbereich-Konstruktion im Jahre 1976 vor. Weil seine Konstruktion aus der Kategorie der beschränkt vollständigen algebraischen Bereiche hinausführt, schlug er die größere Kategorie der SFP-Bereiche vor, die unter seiner Konstruktion abgeschlossen ist. Kurze Zeit später führte Smyth [Smy78] eine einfachere Konstruktion ein, die obere oder Smyth-Potenzkonstruktion, die beschränkte Vollständigkeit erhält. In [Smy83] kommt eine dritte Potenzbereich-Konstruktion vor, die untere Potenzkonstruktion, die das Trio der klassischen Potenzbereich-Konstruktionen vervollständigt.

Von Problemen in der Datenbanktheorie ausgehend schlugen Buneman et al. [BDW88] vor, den unteren und oberen Potenzbereich zu einem sogenannten Sandwich-Potenzbereich zu kombinieren. Gunter erforschte die Logik der klassischen Potenzbereiche [Gun89a]. Indem er die Logik von Plotkins Bereich auf natürliche Weise ausdehnte, entwickelte er einen sogenannten gemischten Potenzbereich [Gun89b, Gun90]. Plotkins Potenzbereich ist eine Teilmenge des gemischten, welcher wiederum eine Teilmenge des Sandwich-Potenzbereichs ist.

Unabhängig davon fanden wir den Sandwich- und den gemischten Potenzbereich in einer isomorphen Darstellung als großen und kleinen Mengenbereich, als wir Konstruktionen zur Beschreibung der Semantik eines abstrakten Datentyps von Mengen in einer funktionalen Sprache entwickelten (siehe [Hec90c]).

In Anbetracht von mindestens 5 verschiedenen Potenzbereich-Konstruktionen stellt sich die Frage nach dem Wesen dieser Konstruktionen, d.h. nach denjenigen Eigenschaften, die die Anwendung des Begriffs 'Potenzbereich' gestatten. Wir suchen also nach einer Theorie der Potenzbereich-Konstruktionen, die die existierenden beschreibt und die Beantwortung der folgenden Fragen gestattet:

(1) Was sind Potenzbereich-Konstruktionen?

(2) Welche Beziehungen bestehen zwischen den verschiedenen Potenzbereich-Konstruktionen?

(3) Gibt es mehr als die fünf oben aufgezählten Konstruktionen?

(4) Wenn ja, wie sind diese fünf Konstruktionen unter allen anderen ausgezeichnet?

Eine allgemeine Theorie der Potenzkonstruktionen sollte auch — wenn sie nützlich sein soll — allgemeine Sätze enthalten, die auf alle speziellen Potenzbereich-Konstruktionen anwendbar sind.

Die Autoren der frühen Papiere über Potenzbereich-Konstruktionen erwähnen alle einige algebraische Operationen, die in ihren Potenzbereichen möglich sind. Sie geben jedoch weder die algebraischen Eigenschaften dieser Operationen noch die Beziehungen zwischen ihnen an. In [HP79] werden die drei klassischen Potenzbereiche als freie Algebren bezüglich gewisser algebraischer Theorien charakterisiert. Diese Theorien beschreiben kommutative idempotente Halbgruppen mit verschiedenen Zusatzaxiomen, die aber mathematisch nicht gut motiviert sind. Gunter [Gun89b] charakterisiert seine gemischten Potenzbereiche auf etwa dieselbe Weise. Anstelle zusätzlicher Axiome für die Halbgruppe benützt er eine zusätzliche einstellige Operation. In [Hec90c] konnten auch die Sandwich-Potenzbereiche als freie Algebren beschrieben werden bezüglich einer Theorie von Halbgruppen mit einer partiellen Verknüpfung, deren algorithmische Bedeutung im Dunkeln liegt (siehe Kap. 24).

Diese Ergebnisse liefern aber wohl nicht die gewünschte allgemeine Theorie der Potenzbereich-Konstruktionen. Ihre Antwort auf die Frage (1) von oben wäre nämlich, daß Potenzbereiche freie Algebren bezüglich einer algebraischen Theorie von kommutativen idempotenten Halbgruppen mit mehr oder minder seltsamen zusätzlichen Operationen und Axiomen sind. Darüberhinaus hätte diese Theorie den Nachteil, daß sie eher einzelne Potenzbereiche behandelt als die ganze Potenzbereich-Konstruktion, d.h. die Abbildung von Grundbereichen nach Potenzbereichen.

Die algebraische Theorie der Potenzbereich-Konstruktionen

Gunter beschreibt in [Gun90] die Semantik einer nichtdeterministischen Sprache mithilfe einer generischen Potenzbereich-Konstruktion. Diese bietet drei Grundoperationen an, nämlich Einermengenbildung, Vereinigung von zwei Mengen und Ausdehnung einer mengenwertigen Funktion von Punkten auf Mengen. Diese generische Semantik kann instanziiert werden, indem die generische Konstruktion durch eine konkrete ersetzt wird, welche die notwendigen Grundoperationen zur Verfügung stellt.

Wir definieren daher eine Potenzbereich-Konstruktion durch Axiome, die die Existenz einiger Grundoperationen fordern. Dazu kommen Axiome, denen die Grundoperationen genügen müssen. Über die Wahl dieser Axiome könnte man sich streiten. Wir sind jedoch der Ansicht, daß unsere Wahl natürlich ist. Diese Meinung wird dadurch bestärkt, daß unsere Definition zu einer reichen Theorie führt, die in Teil II der Arbeit vorgestellt wird. Die bekannten Konstruktionen werden von dieser Theorie nicht nur erfaßt, sondern auch unter allen anderen möglichen Konstruktionen ausgezeichnet.

Spezifikation der Potenzkonstruktionen

Im folgenden verstehen wir unter Bereichen gerichtet vollständige partiell geordnete Mengen. Wir fordern also weder die Existenz eines kleinsten Elements noch Zusatzeigenschaften wie Algebraizität. Wie in Kap. 9 ausgeführt, bildet eine *Potenz(bereich)-Konstruktion* $\mathcal{P}$ *Grundbereiche* $\mathbf{X}$ in *Potenzbereiche* über $\mathbf{X}$ ab. Die Potenzbereiche müssen den folgenden Axiomen genügen:

Leere Menge: Es gibt ein ausgezeichnetes Element θ in jedem Potenzbereich $\mathcal{P}\mathbf{X}$.

Vereinigung: Es gibt eine stetige Operation $\uplus : [\mathcal{P}\mathbf{X} \times \mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{X}]$ in jedem Potenzbereich. '$\uplus$' ist kommutativ und assoziativ mit neutralem Element θ.

Einermengen:
Es gibt eine stetige Abbildung $\iota : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{X}]$, $x \mapsto \{\!|x|\!\}$ für jeden Grundbereich $\mathbf{X}$.

Erweiterung von Funktionen: Für je zwei Bereiche $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ gibt es eine höhere Funktion $ext : [[\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}] \to [\mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]]$, die mengenwertige Funktionen auf Grundbereichelementen in mengenwertige Funktionen auf Mengen abbildet. Sie muß den folgenden Axiomen genügen:

(P1) $ext\, f\, \theta = \theta$

(P2) $ext\, f\, (A \uplus B) = ext\, f\, A \uplus ext\, f\, B$

(P3) $ext\, f\, \{\!|x|\!\} = f x$ oder: $ext\, f \circ \iota = f$
(siehe Abbildung)

(S1) $ext\, (\lambda x.\, \theta)\, A = \theta$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}\mathbf{X} \arrow[r, "ext\, f"] & \mathcal{P}\mathbf{Y} \\
\mathbf{X} \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(S2) $ext\, (\lambda x.\, fx \uplus gx)\, A = ext\, f\, A \uplus ext\, g\, A$.
Wenn man '$\uplus$' auf Funktionen hochhebt, kann man kürzer schreiben: $ext\, (f \uplus g) = ext\, f \uplus ext\, g$.

(S3) $ext\, (\lambda x.\, \{\!|x|\!\})\, A = A$ oder: $ext\, \iota = id$.

(S4) Für je zwei Abbildungen $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ und $g : [\mathbf{Y} \to \mathcal{P}\mathbf{Z}]$ gilt

$$ext\, g\, (ext\, f\, A) = ext\, (\lambda a.\, ext\, g\, (fa))\, A$$

für alle A aus $\mathcal{P}\mathbf{X}$, oder: $ext\, g \circ ext\, f = ext\, (ext\, g \circ f)$
(siehe Abbildung)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}\mathbf{X} \arrow[r, "ext\, f"] & \mathcal{P}\mathbf{Y} \arrow[r, "ext\, g"] & \mathcal{P}\mathbf{Z} \\
\mathbf{X} \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] & \mathbf{Y} \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Man beachte, daß wir nicht fordern, daß $ext\, f$ durch (P1) bis (P3) eindeutig für jedes f bestimmt ist. Wenn wir diese Eindeutigkeit gefordert hätten, wären die Gleichungen (S1) bis (S4) beweisbar. Deshalb nennen wir sie sekundäre Axiome im Gegensatz zu den primären Axiomen (Pi).

Halbringe und Moduln

Die oben eingeführten Grundoperationen erlauben die Herleitung vieler anderer Operationen mit nützlichen algebraischen Eigenschaften (siehe Kap. 10). In dieser Zusammenfassung erwähnen wir nur die wichtigsten.

Die Erweiterungsfunktion hängt von zwei Grundbereichen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ ab. Besonders interessante Instanzen der Erweiterungsfunktion entstehen, wenn einer der beiden Bereiche $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ der Einpunkt-Bereich $\mathbf{1} = \{\diamond\}$ ist. Im Falle $\mathbf{X} = \mathbf{1}$ hat die Erweiterungsfunktion die Funktionalität $ext : [[\mathbf{1} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}] \to [\mathcal{P}\mathbf{1} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]]$. Weglassen des unnötigen Arguments aus $\mathbf{1}$ sowie Zusammenfassen und Vertauschen der Argumente führt zum 'äußeren Produkt' $\cdot : [\mathcal{P}\mathbf{1} \times \mathcal{P}\mathbf{Y} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$. Seine Definition ist $b \cdot S = ext\,(\lambda\diamond. S)\,b$. Multiplikation wird zur inneren Verknüpfung auf $\mathcal{P}\mathbf{1}$, wenn man zusätzlich $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$ wählt.

Wenn wir die leere Menge θ von $\mathcal{P}\mathbf{1}$ in 0, die Vereinigung '$\uplus$' in '+', und die Einermenge $\{|\diamond|\}$ in 1 umbenennen, erhalten wir aus den Potenzaxiomen die folgenden algebraischen Gesetze für $\mathcal{P}\mathbf{1}$:

$$
\begin{array}{lll}
a + (b + c) = (a + b) + c & a + b = b + a & a + 0 = 0 + a = a \\
a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c & & a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \\
a \cdot (b_1 + b_2) = (a \cdot b_1) + (a \cdot b_2) & (a_1 + a_2) \cdot b = (a_1 \cdot b) + (a_2 \cdot b) & a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0
\end{array}
$$

Solche algebraischen Strukturen heißen *Halbringe*. Man beachte, daß alle Algebren, die in dieser Arbeit vorkommen, Bereiche als Trägermenge und stetige Funktionen als Operationen haben.

Halbringe verallgemeinern sowohl Ringe als auch distributive Verbände. Man kann sie daher auch logisch interpretieren: 0 als 'falsch', 1 als 'wahr', Addition als Disjunktion und Multiplikation als Konjunktion. Der Halbring $\mathcal{P}\mathbf{1}$ stellt dann die inhärente Logik der Potenzbereich-Konstruktion $\mathcal{P}$ dar. Diese Sicht der Dinge ist besonders sinnvoll, wenn die Halbringaddition idempotent ist. Bei den bekannten Potenzkonstruktionen ist das der Fall.

Wenn wir auch die leere Menge θ von $\mathcal{P}\mathbf{X}$ in 0 und die Vereinigung '$\uplus$' in '+' umbenennen, erhalten wir die folgenden algebraischen Gesetze für $\mathcal{P}\mathbf{X}$:

$$
\begin{array}{lll}
A + (B + C) = (A + B) + C & A + B = B + A & A + 0 = 0 + A = A \\
r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A & & 1 \cdot A = A \\
r \cdot (A_1 + A_2) = (r \cdot A_1) + (r \cdot A_2) & (r_1 + r_2) \cdot A = (r_1 \cdot A) + (r_2 \cdot A) & r \cdot 0 = 0 \cdot A = 0
\end{array}
$$

Hierbei wurden die Elemente von $\mathcal{P}\mathbf{X}$ groß geschrieben im Unterschied zu den Elementen von $\mathcal{P}\mathbf{1}$.

Solche algebraischen Strukturen heißen *$\mathcal{P}\mathbf{1}$-Moduln*. Eine Funktion $f : [M \to M']$ zwischen zwei $\mathcal{P}\mathbf{1}$-Moduln heißt *linear* wenn $f\,(A + B) = fA + fB$ und $f\,(r \cdot A) = r \cdot fA$ gilt.

Die Ergebnisse von Kap. 10 liefern den folgenden Satz:

Satz 11.1.3: Sei $\mathcal{P}$ eine Potenzkonstruktion und seien

$$\begin{array}{ll} + = \uplus : & [\mathcal{P}\mathbf{X} \times \mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{X}] \\ 0 = \theta : & \mathcal{P}\mathbf{X} \\ \cdot = \lambda(a, S).\, ext\,(\lambda\diamond.\, S)\, a : & [\mathcal{P}\mathbf{1} \times \mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{X}] \\ 1 = \{\!|\diamond|\!\} : & \mathcal{P}\mathbf{1} \end{array}$$

Dann ist $\mathcal{P}\mathbf{1}$ mit diesen Operationen ein Halbring und $\mathcal{P}\mathbf{X}$ ein $\mathcal{P}\mathbf{1}$-Modul für alle Bereiche $\mathbf{X}$. Für $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ ist die Erweiterung $ext\, f : [\mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ linear und $ext\, f \circ \iota = f$ gilt.

Dieses Ergebnis bringt unsere Arbeit in Verbindung mit einem Artikel von Main [Mai85], in dem Potenzbereiche als freie Halbring-Moduln eingeführt werden. Es gibt jedoch einige Unterschiede: unsere Konstruktionen können auch unfreie Moduln erzeugen und unsere Einermengen-Funktion ι braucht nicht strikt zu sein.

Der Halbring $\mathcal{P}\mathbf{1}$ heißt der *charakteristische Halbring* der Potenzkonstruktion $\mathcal{P}$. Größere Allgemeinheit erreicht man, wenn man auch solche Halbringe charakteristisch für die Potenzkonstruktion $\mathcal{P}$ nennt, die zu $\mathcal{P}\mathbf{1}$ isomorph sind. In diesem Falle muß allerdings der Isomorphismus als fest angenommen werden.

Verschiedene Potenzkonstruktionen können durchaus denselben charakteristischen Halbring haben. Umgekehrt ergibt sich aus den Sätzen 14.5.1 und 15.1.1, daß es zu jedem gegebenen Halbring zwei ausgezeichnete Potenzkonstruktionen gibt.

Potenzhomomorphismen

Homomorphismen zwischen algebraischen Strukturen sind Abbildungen, die alle Operationen dieser Strukturen erhalten. Potenz-Konstruktionen können als algebraische Strukturen auf einer höheren Ebene betrachtet werden. Daher ist es möglich und auch sinnvoll, entsprechende Homomorphismen zu definieren (siehe Kap. 12).

Ein Potenzhomomorphismus $H : \mathcal{P} \dot{\to} \mathcal{Q}$ zwischen zwei Potenzkonstruktionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ ist eine 'Familie' von Abbildungen $H = (H_\mathbf{X})_\mathbf{X} : [\mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{Q}\mathbf{X}]$, die über alle Potenzoperationen kommutieren, d.h.

- Die leere Menge von $\mathcal{P}\mathbf{X}$ wird auf die leere Menge von $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ abgebildet: $H\theta = \theta$.
- Das Bild einer Vereinigung ist die Vereinigung der Bilder: $H(A \uplus B) = (HA) \uplus (HB)$.
- Einermengen in $\mathcal{P}\mathbf{X}$ werden zu Einermengen in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$: $H\{\!|x|\!\}_\mathcal{P} = \{\!|x|\!\}_\mathcal{Q}$.
- Sei $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$. Dann muß $H \circ f : [\mathbf{X} \to \mathcal{Q}\mathbf{Y}]$ und $H(ext_\mathcal{P}\, f\, A) = ext_\mathcal{Q}\,(H \circ f)\,(HA)$ für alle A in $\mathcal{P}\mathbf{X}$ gelten.

Wenn zwei Konstruktionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ denselben charakteristischen Halbring haben, kann man definieren, daß ein Potenzhomomorphismus linear ist, wenn alle Funktionen $H_\mathbf{X}$ linear sind.

Ein Potenzisomorphismus zwischen zwei Konstruktionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ ist eine Familie von Isomorphismen $H = H_\mathbf{X} : [\mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{Q}\mathbf{X}]$, so daß sowohl $(H_\mathbf{X})_\mathbf{X}$ als auch $(H_\mathbf{X}^{-1})_\mathbf{X}$ Potenzhomomorphismen sind.

Initiale Potenzkonstruktionen

Eine Potenzkonstruktion $\mathcal{P}$ ist *initial* für einen Halbring R, wenn es zu allen Potenzkonstruktionen $\mathcal{Q}$ mit demselben charakteristischen Halbring R genau einen linearen Potenzhomomorphismus $\mathcal{P} \dot{\to} \mathcal{Q}$ gibt. Ein Hauptergebnis der Theorie der Potenzkonstruktionen ist, daß es für alle Halbringe R initiale Konstruktionen gibt.

Initiale Potenzbereiche über $\mathbf{X}$ ergeben sich aus freien R-$\mathbf{X}$-Moduln. $(\mathbf{F}, \eta)$ ist ein freies R-$\mathbf{X}$-Modul, wenn $\mathbf{F}$ ein R-Modul und η eine stetige Abbildung von $\mathbf{X}$ nach $\mathbf{F}$ ist, so daß es für jedes R-Modul M und jede stetige Abbildung $f : \mathbf{X} \to M$ genau eine stetige lineare Erweiterung $\overline{f} : \mathbf{F} \to M$ mit $\overline{f} \circ \eta = f$ gibt.

Die Idee, freie Moduln zu betrachten, geht auf [HP79] zurück. Hoofman [Hoo87] zeigte die Existenz freier Moduln für den Halbring $\{0, 1\}$. Main [Mai85] schlug Potenzkonstruktionen vor, die als freie Moduln für einige ungewöhnliche Halbringe definiert waren. Im Gegensatz zu uns fordert er dabei die Striktheit der Einermengenabbildung, ohne genau zu sagen warum. Die Einermengenabbildungen in die gemischten und Sandwich-Potenzbereiche jedenfalls sind nicht strikt, weswegen sie in unserer allgemeinen Theorie der Potenzkonstruktionen auch nicht strikt sein können.

Freie R-$\mathbf{X}$-Moduln existieren für alle Halbringe R und Bereiche $\mathbf{X}$ und sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Während der Eindeutigkeitsbeweis ziemlich einfach ist, ist der Existenzbeweis recht schwierig. Üblicherweise wird er mit Hilfsmitteln der Kategorientheorie geführt. Für diese Arbeit wurde der Beweis von [Hoo87] abgeändert und so vereinfacht, daß keine Sätze aus der Kategorientheorie mehr benötigt werden (Abschnitt 13.5). Leider wird das freie Modul durch den Beweis nicht explizit gegeben.

Der Hauptsatz über initiale Potenzkonstruktionen wird in Abschnitt 14.5 formuliert.

Satz 14.5.1:

Sei R ein Halbring und sei $\mathcal{P}$ die Konstruktion, die jeden Grundbereich $\mathbf{X}$ in das freie R-$\mathbf{X}$-Modul $(\mathbf{F}, \eta)$ abbildet. Dann ist $\mathcal{P}$ die initiale Potenzkonstruktion für Halbring R.

Die Potenzoperationen Vereinigung und leere Menge sind durch die Addition und ihr neutrales Element in $\mathbf{F}$ gegeben. Die Einermengenabbildung ist η. Für Funktionen $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ ist $ext\, f$ gegeben durch die eindeutige Erweiterung von f. Das von vornherein gegebene äußere Produkt der Moduln $\mathcal{P}\mathbf{X}$ stimmt mit dem aus den Potenzoperationen abgeleiteten äußeren Produkt überein.

Für jede andere Potenzkonstruktion $\mathcal{Q}$ mit Halbring R erhält man den eindeutigen linearen Potenzhomomorphismus $H : \mathcal{P} \dot{\to} \mathcal{Q}$ als Erweiterung $H_{\mathbf{X}} = \overline{\lambda x.\, \{\!|x|\!\}_{\mathcal{Q}}}$.

Finale Potenzkonstruktionen

Eine Potenzkonstruktion $\mathcal{P}$ ist *final* für Halbring R, wenn es für jede Potenzkonstruktion $\mathcal{Q}$ mit demselben Halbring R genau einen linearen Potenzhomomorphismus $\mathcal{Q} \dot{\to} \mathcal{P}$ gibt. Finale Konstruktionen werden in Kap. 15 behandelt.

Finale Potenzkonstruktionen wurden in der Literatur bisher nicht vorgeschlagen, wahrscheinlich weil der Begriff des Potenzhomomorphismus fehlte. Im Gegensatz zu initialen

Konstruktionen können finale Potenzkonstruktionen durch Prädikate zweiter Ordnung explizit dargestellt werden. Es ergibt sich, daß die von Smyth [Smy83] eingeführte obere Potenzkonstruktion final ist, während sein ursprünglicher Vorschlag in [Smy78] sich als initial herausstellte.

Wie oben erwähnt, impliziert die Erweiterungsfunktion besonders interessante Operationen, wenn einer der beiden Bereiche, von denen sie abhängt, der Einpunktbereich $\mathbf{1} = \{\diamond\}$ ist. Im Falle $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$ erhält man $ext: [[\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{1}] \to [\mathcal{P}\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{1}]]$. Vertauschen der Argumente liefert eine Abbildung $\mathcal{E} : [\mathcal{P}\mathbf{X} \to [[\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{1}] \to \mathcal{P}\mathbf{1}]]$ von formalen Mengen nach Funktionen zweiter Ordnung. Gemäß der logischen Interpretation von $\mathcal{P}\mathbf{1}$ können diese Funktionen als Prädikate zweiter Ordnung aufgefaßt werden. Die intuitive Bedeutung von $\mathcal{E}$ ist existentielle Quantifizierung. Der Wert von $\mathcal{E} A\, p$ zeigt für ein A in $\mathcal{P}\mathbf{X}$ und ein Prädikat $p : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{1}]$ an, ob ein Element von A das Prädikat p erfüllt.

Die Axiome der Erweiterungsfunktion liefern die folgenden Eigenschaften:

(P1) $\mathcal{E}\, \theta = \lambda p.\, \theta$

(P2) $\mathcal{E}\, (A \uplus B) = \lambda p.\, (\mathcal{E}\, A\, p) \uplus (\mathcal{E}\, B\, p)$

(P3) $\mathcal{E}\, \{\!|x|\!\} = \lambda p.\, p\, x$

(S4) $\mathcal{E}\, (ext\, f\, A) = \lambda p.\, \mathcal{E} A\, (\lambda a.\, \mathcal{E}\, (f a)\, p)$

Diese Resultate legen nahe, zu einem gegebenen Halbring $\mathcal{P}\mathbf{1}$ eine Potenzkonstruktion durch $\mathcal{P}\mathbf{X} = [[\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{1}] \to \mathcal{P}\mathbf{1}]$ zu definieren. Eine leichte Variante dieser Idee liefert tatsächlich eine Potenzkonstruktion.

Sei R ein gegebener Halbring. Dann können wir ein Produkt $\cdot : [\mathbf{X} \to R] \times R \to [\mathbf{X} \to R]$ durch $f \cdot r = \lambda x. fx \cdot r$ definieren. In ähnlicher Weise kann auch eine Addition als innere Verknüpfung auf $[\mathbf{X} \to R]$ eingeführt werden. Eine Funktion $F : [[\mathbf{X} \to R] \to R]$ ist *rechtslinear*, falls $F\, (f_1 + f_2) = F f_1 + F f_2$ und $F\, (f \cdot r) = F f \cdot r$ gelten. Der Bereich aller rechtslinearen Funktionen von $[\mathbf{X} \to R]$ nach R wird durch $[[\mathbf{X} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$ bezeichnet.

Satz 15.1.1:

Sei R ein gegebener Halbring. Die finale Potenzkonstruktion für R bildet jeden Grundbereich $\mathbf{X}$ in die Menge der rechtslinearen Prädikate zweiter Ordnung über $\mathbf{X}$ ab: $\mathcal{P}\mathbf{X} = [[\mathbf{X} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$. Ihre Operationen sind gegeben durch

- $\theta = \lambda g.\, 0$
- $A \uplus B = \lambda g.\, Ag + Bg$
- $\{\!|x|\!\} = \lambda g.\, gx$ für $x \in \mathbf{X}$.
- $ext\, f\, A = \lambda g.\, A\, (\lambda a.\, fag)$ für $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ und $A \in \mathcal{P}\mathbf{X}$.

Sei $\mathcal{Q}$ eine andere Potenzkonstruktion mit Halbring R. Der eindeutige lineare Potenzhomomorphismus von $\mathcal{Q}$ nach $\mathcal{P}$ ist durch die existentielle Quantifizierung $\mathcal{E} A = \lambda g.\, ext_{\mathcal{Q}}\, g\, A$ für A in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ gegeben.

Die Definition von ext sowie die der übrigen Operationen werden durch die oben aufgeführten Eigenschaften von $\mathcal{E}$ motiviert. Man beachte, daß $\mathcal{P}\mathbf{1}$ sich zu $[[\mathbf{1} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$ ergibt, das nicht gleich sondern nur isomorph zu R ist.

Teilkonstruktionen

Sei $\mathcal{P}$ eine gegebene Potenzkonstruktion. $\mathcal{Q}$ heißt *Teilkonstruktion* von $\mathcal{P}$, falls $\mathcal{Q}$ Grundbereiche $\mathbf{X}$ in Teilmengen von $\mathcal{P}\mathbf{X}$ abbildet, so daß

- $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ abgeschlossen ist gegenüber Suprema von gerichteten Mengen,
- $\theta \in \mathcal{Q}\mathbf{X}$,
- wenn A und B in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ sind, dann ist $A \uplus B$ in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$,
- $\{\!|x|\!\}$ in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ ist für alle x in $\mathbf{X}$,
- wenn $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{Q}\mathbf{Y}]$ und A in $\mathcal{Q}\mathbf{X}$, dann ist $\mathit{ext}\, f\, A$ in $\mathcal{Q}\mathbf{Y}$.

Kurz, $\mathcal{Q}\mathbf{X}$ ist abgeschlossen gegenüber allen Potenzoperationen von $\mathcal{P}$. $\mathcal{Q}$ ist trivialerweise eine Potenzkonstruktion, da die Gültigkeit der Potenzaxiome für $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{P}$ geerbt wird. Teilkonstruktionen werden in Kap. 14 behandelt.

Man sieht leicht, daß der Durchschnitt einer Familie von Teilkonstruktionen einer Potenzkonstruktion $\mathcal{P}$ wieder eine Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$ ist, wenn wir $(\bigcap_{i\in I} \mathcal{Q}_i)\mathbf{X} = \bigcap_{i\in I}(\mathcal{Q}_i\mathbf{X})$ definieren. Daher bilden die Teilkonstruktionen von $\mathcal{P}$ einen vollständigen Verband.

Sei R ein Halbring. R' ist ein *Teilhalbring* von R, falls R' eine Teilmenge von R ist, die 0 und 1 enthält und abgeschlossen ist gegenüber Suprema von gerichteten Mengen, Addition und Multiplikation. Weil die Operationen im charakteristischen Halbring von den Potenzoperationen abgeleitet sind, ist der Halbring einer Teilkonstruktion $\mathcal{Q}$ von $\mathcal{P}$ ein Teilhalbring des Halbrings von $\mathcal{P}$. Aus denselben Gründen ist der Halbring eines Durchschnitts von Teilkonstruktionen gleich dem Durchschnitt der Halbringe der Teilkonstruktionen.

Wir fanden zwei allgemeine Methoden zur Bildung von Teilkonstruktionen einer gegebenen Konstruktion $\mathcal{P}$ mit Halbring R. Die Methode der Kernbildung ergibt die kleinste Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$, die noch den Halbring R hat, während die Methode der existentiellen Einschränkung die größte Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$ mit einem gegebenen Teilhalbring R' von R liefert. Der Kern der existentiellen Einschränkung ist dann die kleinste Teilkonstruktion mit dem gegebenen Halbring R'.

Der *Kern* $\mathcal{P}^c\mathbf{X}$ eines Potenzbereichs $\mathcal{P}\mathbf{X}$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathcal{P}\mathbf{X}$, die die leere Menge θ und alle Einermengen $\{\!|x|\!\}$ enthält und abgeschlossen ist gegenüber Vereinigung '$\uplus$', Produkt mit Faktoren aus $\mathcal{P}\mathbf{1}$ und gerichteten Suprema. Man kann zeigen, daß die Moduln $\mathcal{P}^c\mathbf{X}$ auch gegenüber der Erweiterungsfunktion von $\mathcal{P}$ abgeschlossen sind. Daher ist $\mathcal{P}^c$ eine Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$. Wir nennen sie den *Kern* von $\mathcal{P}$. Er ist die kleinste Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$ mit demselben Halbring wie $\mathcal{P}$.

Eine Potenzkonstruktion, die mit ihrem Kern übereinstimmt, heißt *reduziert*. Reduzierte Konstruktionen haben besonders schöne Eigenschaften. Alle initialen Konstruktionen sind reduziert.

Wenn $\mathcal{P}$ eine Potenzkonstruktion mit Halbring R ist und R' ein Teilhalbring von R, dann ist die *existentielle Einschränkung* von $\mathcal{P}$ auf R' definiert durch

$$\mathcal{Q}\mathbf{X} = \mathcal{P}|_{R'}\mathbf{X} = \{A \in \mathcal{P}\mathbf{X} \mid \forall p : [\mathbf{X} \to R'] : \mathcal{E} A\, p \in R'\}.$$

Sie ist eine Teilkonstruktion von $\mathcal{P}$ mit Halbring R' und die größte derartige Teilkonstruktion.

Wegen ihrer Definition durch existentielle Quantifizierung könnte man glauben, daß die existentielle Einschränkung einer finalen Konstruktion für R eine finale Konstruktion für R' ist. Das ist jedoch nicht der Fall, wie wir in Abschnitt 23.4 sehen werden. Dafür gibt es zwei Gründe. Erstens können zwei verschiedene Prädikate in $[[\mathbf{X} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$ auf Prädikaten in $[\mathbf{X} \to R']$ übereinstimmen. Sie unterscheiden sich dann noch in der Einschränkung der finalen Konstruktion für R, obwohl sie in $[[\mathbf{X} \to R'] \stackrel{rlin}{\to} R']$ gleich wären. Zweitens könnte $[[\mathbf{X} \to R'] \stackrel{rlin}{\to} R']$ zusätzliche Elemente haben, die sich nicht aus der Einschränkung von Prädikaten in $[[\mathbf{X} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$ ergeben.

Trotz dieser allgemeinen Resultate finden sich auch Beispiele für Halbringe R und R', wo die existentielle Einschränkung der finalen Konstruktion für R final für R' ist — siehe Satz 23.3.1.

Produkte von Potenzkonstruktionen

In Kap. 16 wird eine weitere Methode zur Bildung neuer Konstruktionen aus bereits existierenden vorgestellt. Zu einer gegebenen Familie $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ von Potenzkonstruktionen wird eine Produktkonstruktion $\mathcal{P} = \prod_{i\in I} \mathcal{P}_i$ wie folgt gebildet:

- $\mathcal{P}\mathbf{X} = \prod_{i\in I} \mathcal{P}_i\mathbf{X}$ für alle Grundbereiche $\mathbf{X}$
- $\theta = (\theta_i)_{i\in I}$
- $(A_i)_{i\in I} \uplus (B_i)_{i\in I} = (A_i \uplus B_i)_{i\in I}$
- $\{\!|x|\!\} = (\{\!|x|\!\}_i)_{i\in I}$ für alle x in $\mathbf{X}$
- Für $f : [\mathbf{X} \to \mathcal{P}\mathbf{Y}]$ sei $f_i = \pi_i \circ f$. Dann ist $ext\, f\, (A_i)_{i\in I} = (ext_i\, f_i\, A_i)_{i\in I}$, wobei ext_i die Erweiterungsfunktion von $\mathcal{P}_i$ bezeichnet. Hierbei bedeutet π_i Projektion auf die Komponente i.

Die Überprüfung der Potenzaxiome für $\mathcal{P}$ ist einfach, da die Potenzoperationen in den einzelnen Dimensionen unabhängig voneinander arbeiten. Der charakteristische Halbring von $\mathcal{P}$ ist das Produkt der charakteristischen Halbringe der $\mathcal{P}_i$.

Folgende Sätze über das Produkt wurden hergeleitet:

Finalitätssatz 16.3.1:
Wenn $\mathcal{P}_i$ finale Potenzkonstruktionen für die Halbringe R_i sind für alle $i \in I$, dann ist das Produkt $\prod_{i\in I} \mathcal{P}_i$ eine finale Konstruktion für das Produkt $\prod_{i\in I} R_i$.

$$\prod_{i\in I}[[\mathbf{X} \to R_i] \stackrel{rlin}{\to} R_i] \;\cong\; [[\mathbf{X} \to \prod_{i\in I} R_i] \stackrel{rlin}{\to} \prod_{i\in I} R_i]$$

Kernsatz 16.5.1: Der Kern des Produkts zweier Potenzkonstruktionen ist gleich dem Produkt ihrer Kerne: $(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2)^c = \mathcal{P}_1^c \times \mathcal{P}_2^c$

Initialitätssatz 16.5.3: Wenn $\mathcal{P}_1$ initial für R_1 und $\mathcal{P}_2$ initial für R_2 ist, dann ist $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ initial für $R_1 \times R_2$.

Faktorisierungssatz 16.6.1:
Sei $\mathcal{P}$ eine Potenzbereich-Konstruktion für den Halbring $R_1 \times R_2$. $\mathcal{P}$ kann faktorisiert werden, d.h. es gibt Potenzkonstruktionen $\mathcal{P}_1$ für R_1 und $\mathcal{P}_2$ für R_2, so daß $\mathcal{P}$ isomorph zu $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ ist vermittels eines linearen Potenzisomorphismus genau dann, wenn $ext\, (\lambda x.\, (1, 0) \cdot \{\!|x|\!\})\, B = (1, 0) \cdot B$ für alle B in allen Potenzbereichen $\mathcal{P}\mathbf{X}$ gilt.

Die Bedingung des Faktorisierungssatzes ist für viele Klassen von Potenzkonstruktionen erfüllt. Zum Beispiel kann jede reduzierte Potenzkonstruktion für $R_1 \times R_2$ faktorisiert werden. Die resultierenden Faktoren sind wieder reduziert (vgl. Kor. 16.6.4).

Spezielle Potenzkonstruktionen

Die algebraische Theorie der Potenzbereich-Konstruktionen kann auf die fünf am Anfang erwähnten bekannten Potenzkonstruktionen angewandt werden. In der folgenden Zusammenfassung unserer Ergebnisse beschränken wir uns auf algebraische Grundbereiche.

Die fünf bekannten Potenzkonstruktionen können wie folgt charakterisiert werden:

- Die untere Potenzkonstruktion $\mathcal{L}$ ist sowohl initial als auch final für den Halbring $\mathbf{L} = \{0, 1\}$ mit $0 < 1$ und $1 + 1 = 1$.
- Die obere oder Smyth-Potenzkonstruktion $\mathcal{U}$ ist sowohl initial als auch final für den Halbring $\mathbf{U} = \{0, 1\}$ mit $1 < 0$ und $1 + 1 = 1$.
- Die konvexe oder Plotkin-Potenzkonstruktion $\mathcal{C}$ ist initial für den Halbring $\mathbf{C} = \{0, 1\}$ mit $1 + 1 = 1$ und unvergleichbaren Werten 0 und 1.
- Die gemischte Potenzkonstruktion $\mathcal{M}$ von Gunter ist initial für den Halbring $\mathbf{B} = \{\perp, 0, 1\}$, wobei $\perp$ unter den unvergleichbaren Werten 0 und 1 liegt. In $\mathbf{B}$ ist Addition gegeben durch parallele Disjunktion und Multiplikation durch parallele Konjunktion.
- Die Sandwich-Potenzkonstruktion $\mathcal{S}$ von Buneman et al. ist final für denselben Halbring $\mathbf{B}$.
- Die finale Potenzkonstruktion für den Halbring $\mathbf{C}$ fehlt in dieser Liste. Sie wurde bisher nie betrachtet, weil sie degeneriert ist und ziemlich merkwürdige Eigenschaften hat.

In Kap. 17 studieren wir die Halbringe $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{B}$ und die dazugehörenden Moduln. Die algebraischen Strukturen, die in [HP79] zur Charakterisierung von $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{U}$ erwähnt werden, sind nichts anderes als $\mathbf{C}$-, $\mathbf{L}$- und $\mathbf{U}$-Moduln ohne 0, während Gunters Mix-Algebren aus [Gun89b, Gun90] nichts anderes als $\mathbf{B}$-Moduln sind. Gunters zusätzliche einstellige Operation ist gerade Multiplikation mit $\perp$.

Die Theorie dieser speziellen Potenzkonstruktionen wird symmetrischer, wenn man zusätzlich die Halbringe $\mathbf{D}$ und $\overline{\mathbf{B}}$ betrachtet. Der 'doppelte' Halbring $\mathbf{D}$ ist definiert als $\mathbf{L} \times \mathbf{U}$. $\mathbf{D}$ hat 4 Elemente: ein kleinstes Element $\perp = (0, 1)$, ein größtes Element $\top = (1, 0)$ und zwei unvergleichbare Werte $0 = (0, 0)$ und $1 = (1, 1)$ dazwischen. $\overline{\mathbf{B}} = \{0, 1, \top\}$ ist der zu $\mathbf{B}$ ordnungsduale Halbring. $\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{B}}$ sind Teilhalbringe von $\mathbf{D}$. Der Schnitt von $\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{B}}$ ist $\mathbf{C}$.

Gemäß der Theorie der Produkte von Potenzkonstruktionen ist das Produkt $\mathcal{D}$ von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{U}$ sowohl initial als auch final für Halbring $\mathbf{D}$. Existentielle Einschränkung auf $\mathbf{B}$ führt zu der Sandwich-Konstruktion $\mathcal{S}$, deren Kern wiederum $\mathcal{M}$ ist. Daher ist $\mathcal{S}$ die größte Teilkonstruktion von $\mathcal{D}$ mit Halbring $\mathbf{B}$, während $\mathcal{M}$ die kleinste ist. Wenn man statt $\mathbf{B}$ den dualen Teilhalbring $\overline{\mathbf{B}}$ benützt, erhält man die duale Sandwich-Konstruktion $\overline{\mathcal{S}}$ und die duale gemischte Konstruktion $\overline{\mathcal{M}}$. Der Schnitt $\mathcal{S}\overline{\mathcal{S}}$ von $\mathcal{S}$ und $\overline{\mathcal{S}}$ ist interessant, weil er beschränkte Vollständigkeit erhält (wenn man die leere Menge wegläßt) und denselben Halbring $\mathbf{C}$ wie Plotkins Konstruktion $\mathcal{C}$ hat. Der Schnitt von $\mathcal{M}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ ist $\mathcal{C}$ selbst.

Die Sandwich-Bedingung, die $\mathcal{S}$ als Teilkonstruktion von $\mathcal{D} = \mathcal{L} \times \mathcal{U}$ auszeichnet, ist durch existentielle Quantifikation gegeben. In Kap. 21 wird diese Bedingung in verschiedene äquivalente Formen übersetzt. Eine explizte Charakterisierung von $\mathcal{M}$ als Teilkonstruktion von $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{S}$ wurde ebenfalls gefunden. Diese Mix-Bedingung wird in Kap. 22 diskutiert. In diesen Kapiteln werden auch die Bedingungen für $\overline{\mathcal{S}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ untersucht.

Teil III enthält noch einige weitere Ergebnisse, die nicht direkt mit der allgemeinen algebraischen Theorie der Potenzkonstruktionen zusammenhängen. In Verallgemeinerung der Ergebnisse von [FM90] wird bewiesen, daß die untere und obere Potenzkonstruktion kommutieren, d.h. $\mathcal{L}\mathcal{U}\mathbf{X}$ und $\mathcal{U}\mathcal{L}\mathbf{X}$ sind isomorph (Abschnitte 20.5 und 20.6). Die Sandwich-Potenzbereiche $\mathcal{S}\mathbf{X}$ werden als freie Sandwich-Algebren über $\mathbf{X}$ charakterisiert (Kap. 24).

Bereichsklassen

Die Ergebnisse von Teil III werden für möglichst allgemeine Klassen von Bereichen bewiesen. Die Übereinstimmung zwischen der initialen, der finalen und der explizit durch Scott-abgeschlossene Mengen gegebenen unteren Potenzkonstruktion konnte für alle Grundbereiche gezeigt werden. Bei den oberen Potenzkonstruktionen ist die Lage jedoch wesentlich komplizierter. Die Frage der Übereinstimmung zwischen der initialen oberen Konstruktion $\mathcal{U}_i$, der finalen $\mathcal{U}_f$, ihres Kerns $\mathcal{U}_c$ und der explizit durch kompakte obere Mengen gegebenen Konstruktion $\mathcal{U}_K$ konnte nur für bestimmte (wenn auch sehr große) Bereichsklassen geklärt werden.

Zur genaueren Untersuchung der Verhältnisse werden in Teil I der Arbeit topologische Methoden eingeführt. Mit ihrer Hilfe können verschiedene Klassen von Bereichen definiert und untersucht werden, die zum Teil neu sind. Für die oberen Potenzkonstruktionen konnte $\mathcal{U}_i\mathbf{X} \cong \mathcal{U}_f\mathbf{X}$ für stetige Grundbereiche $\mathbf{X}$ gezeigt werden (Kap. 19). $\mathcal{U}_f\mathbf{X}$ und $\mathcal{U}_c\mathbf{X}$ hingegen stimmen auf der größeren Klasse der multi-stetigen Bereiche definitiv überein. Die maximalen Klassen der Übereinstimmung sind dabei jeweils unbekannt. $\mathcal{U}_f\mathbf{X}$ und $\mathcal{U}_K\mathbf{X}$ sind genau auf der Klasse der nüchternen Bereiche isomorph. $\mathcal{U}_K\mathbf{X}$ ist jedoch nicht für alle Bereiche sinnvoll definiert, sondern nur auf der Klasse K-RD, die die Klasse der nüchternen Bereiche enthält.

Neuartige topologische Begriffsbildungen wie starke Kompaktheit (Abschnitt 4.7) erlaubten sogar die Definition weiterer oberer Potenzkonstruktionen (Kap. 20). Diese Konstruktionen sind Teilkonstruktionen von $\mathcal{U}_f$ bzw. $\mathcal{U}_K$ und stimmen mit diesen für multistetige Grundbereiche überein. Die Frage der Übereinstimmung auf größeren Klassen blieb offen.

Schlußbemerkungen

Geschichte und Veröffentlichungen

Die algebraische Theorie der Potenzkonstruktionen ist aus dem Versuch entstanden, die semantischen Eigenschaften eines Datentyps von Mengen in einer funktionalen Sprache zu beschreiben. Die so entstandene algebraische Spezifikation der 'Mengenbereich-Konstruktionen' wurde in [Hec90c] veröffentlicht. Zwei spezielle Mengenbereich-Konstruktionen wurden gefunden, die die Spezifikation erfüllen. Die großen Mengenbereiche erwiesen sich später als isomorph zu den Sandwich-Potenzbereichen, während sich die kleinen Mengenbereiche als isomorph zu den gemischten Potenzbereichen herausstellten.

Die Spezifikation der Mengenbereich-Konstruktionen benützt einen von vorneherein gegebenen Bereich logischer Werte, nämlich $\mathbf{B} = \{\perp, 0, 1\}$. Die Untersuchung verschiedener aus der Spezifikation abgeleiteter Operationen ergab — auch inspiriert durch [Mai85] — daß ein Bereich logischer Werte auch im nachhinein aus den mengentheoretischen Operationen der leeren Menge, der Einermengenabbildung, der Vereinigung und der Erweiterungsfunktion gebildet werden kann. Die Spezifikation der Mengenbereich-Konstruktionen ließ sich dann in zwei Teile zerlegen: in eine Spezifikation von allgemeineren Objekten, nämlich Potenzbereich-Konstruktionen, und die Forderung, daß $\mathcal{P}\mathbf{1}$ isomorph zu $\mathbf{B}$ sein solle. Durch Weglassen der jetzt als künstlich empfundenen Einschränkung $\mathcal{P}\mathbf{1} \cong \mathbf{B}$ ergab sich eine erste Version der Spezifikation von Potenzkonstruktionen.

Ein zweiter Ausgangspunkt war die Beobachtung, daß Sandwich-Potenzbereiche $\mathcal{S}\mathbf{X}$ isomorph zu Funktionenräumen $[[\mathbf{X} \to \mathbf{B}] \stackrel{add}{\to} \mathbf{B}]$ sind. Der technische Bericht [Hec90a] enthielt einen ersten ordnungstheoretischen Beweis dieser Isomorphie. In der Folge fanden wir heraus, daß viel allgemeinere Funktionenräume $[[\mathbf{X} \to R] \stackrel{rlin}{\to} R]$ immer Potenzkonstruktionen im Sinne der algebraischen Spezifikation darstellen. Diese Ergebnisse wurden zusammen mit der Beschreibung der gemischten und der Plotkin-Potenzbereiche durch Prädikate zweiter Ordnung auf dem MFPS'90 Workshop in Kingston, Ontario, vorgestellt. Die Finalität dieser Konstruktion wurde erst im Sommer 1990 gefunden. Kern, existentielle Einschränkung und die Theorie der Produkte sind sogar noch jüngere Erkenntnisse.

Die voll entwickelte algebraische Theorie ist in dem Technischen Bericht [Hec90b] enthalten, der zur Veröffentlichung als [Hec91] angenommen wurde. Ein Artikel mit Schwerpunkt auf Prädikaten zweiter Ordnung und den Teilkonstruktionen von $\mathcal{D}$ wurde bei der Zeitschrift TCS eingereicht. Ein dritter Artikel über die Vertauschbarkeit von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{U}$ wurde zur MFPS'91-Konferenz geschickt.

Danksagung

Als erstes möchte ich Prof. Dr. R. Wilhelm danken, der mich in vielfältiger Weise unterstützt, beraten und ermutigt hat. Meinen Kollegen Helmut Seidl, Fritz Müller und Andreas Hense bin ich sehr dankbar für viele wertvolle Diskussionen. Fritz stellte mir auch nützliche Literaturverweise zur Verfügung und Helmut las und prüfte Hunderte von Seiten einer vorläufigen Fassung der Arbeit unter großem Zeitdruck. Carl Gunter verdanke ich die Anregung, den MFPS'90-Workshop zu besuchen, wo ich interessante Diskussionspartner fand. Er und Achim Jung gaben mir wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Notation. Zum Schluß möchte ich noch allen anderen danken, die hier nicht ausdrücklich erwähnt sind und doch einen Beitrag zum Gelingen der Arbeit geleistet haben.